

$k - 87 = 0$. Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι υπερβολή

Φυλλάδιο 3

29/5/15

1.1 Δίνονται τα μη-μεικμένα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$. Νύο το διάνυσμα: $\|\vec{OB}\| \vec{OA} + \|\vec{OA}\| \vec{OB}$ έχει τη διεύθυνση των διχοτόμων της γωνίας $\angle AOB$. Ν.β η διεύθυνση της παραλληλογράμης της $\angle AOB$

Πυν:



Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x} = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$ και $\vec{y} = \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|}$

Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ έχουν μήκος 1, αφού: $\|\vec{x}\| = 1$, $\|\vec{OA}\| = 1$, $\|\vec{y}\| = 1$, $\|\vec{OB}\| = 1$

Το τετράπλευρο με αρχή το 0 και πλευρές τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ είναι ρόμβος. Άρα το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$ έχει τη διεύθυνση των διχοτόμων. Υπολογίζοντας

$$\vec{\delta} = \vec{x} + \vec{y} = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|} + \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|} = \frac{1}{\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\|} \{ \|\vec{OB}\| \vec{OA} + \|\vec{OA}\| \vec{OB} \}$$

Άρα: $\vec{\delta} \parallel \|\vec{OB}\| \vec{OA} + \|\vec{OA}\| \vec{OB}$

Η διεύθυνση της παραλληλογράμης της $\angle AOB$ είναι παράλληλη με το:

$$\vec{\delta} \parallel \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|} - \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|} = \frac{1}{\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\|} \{ \|\vec{OB}\| \vec{OA} - \|\vec{OA}\| \vec{OB} \}$$

$$\parallel \|\vec{OB}\| \vec{OA} - \|\vec{OA}\| \vec{OB}$$



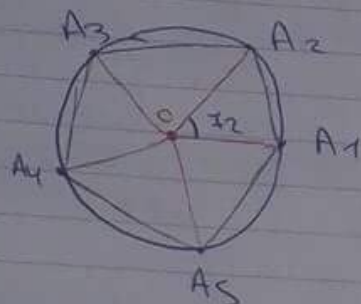
Φυλλαδίο 4

1.1 Δίνεται μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{a}$. Να λυθεί η εξίσωση: $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 1$ όπου: $\vec{x}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα

Λύση: Έχουμε ότι: $1 = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{x}\| \cos \varphi \Rightarrow \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{x}$
Επειδή $\vec{a}$ και $\vec{x}$ είναι μοναδιαίοι $\Rightarrow \boxed{\vec{x} = \vec{a}}$

1.2 Δίνεται κανονικό πεντάγωνο A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 με κέντρο O . Να δείξει ότι:
 $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4} + \vec{OA_5} = \vec{0}$

Λύση:



Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων Ox, Oy έτσι ώστε η αρχή να στο τμήμα OA_1 και ο θετικός ημιάξονας να

έχει τη διεύθυνση του $\vec{OA_1}$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι $\|\vec{OA_1}\| = \|\vec{OA_2}\| = \|\vec{OA_3}\| = \|\vec{OA_4}\| = \|\vec{OA_5}\| = R$

Στο σύστημα αυτό έχουμε: $A_1(R, 0)$

$A_2(R \cos 72^\circ, R \sin 72^\circ)$

$A_3(R \cos 144^\circ, R \sin 144^\circ)$

$A_4(R \cos 216^\circ, R \sin 216^\circ)$

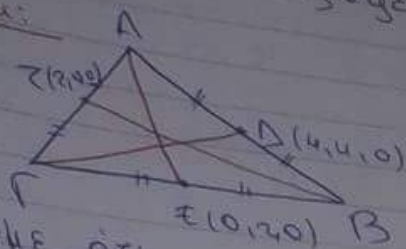
$A_5(R \cos 288^\circ, R \sin 288^\circ)$

Με πρόθεση να βρούμε ότι:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4} + \vec{OA_5} = \vec{0}$$

1.3 Δίνονται τα μέτρα $D(4, 4, 0)$, $E(0, 2, 0)$
 $Z(2, 0, 0)$ των πλευρών ενός τριγώνου να
 βρεθούν οι κορυφές.

Λύση:



Ας υποθέσουμε με
 $A(a_1, a_2, a_3)$
 $B(b_1, b_2, b_3)$
 $C(c_1, c_2, c_3)$ τις
 κορυφές του τριγώνου.

Έχουμε ότι:

$$\vec{BZ} = \vec{BZ} + \vec{BA} = 2\vec{BE} \Rightarrow 2\vec{BE} + 2\vec{BA} = 2\vec{BZ} \Rightarrow \vec{BE} + \vec{BA} = \vec{BZ}$$

$$\Rightarrow (-b_1, 2-b_2, -b_3) + (4-b_1, 4-b_2, -b_3) =$$

$$= (2-b_1, -b_2, -b_3) \Rightarrow \begin{cases} b_1=2 \\ b_2=6 \\ b_3=0 \end{cases} \quad B(2, 6, 0)$$

Τώρα, από τις σχέσεις:

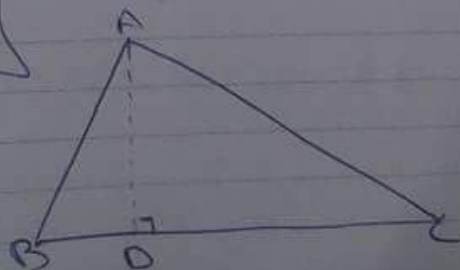
$$\vec{BZ} = 2\vec{BE} \Rightarrow C(1, 2, 0)$$

$$\vec{BA} = 2\vec{BD} \Rightarrow A(6, 2, 0)$$

1.4 Στο τρίγωνο ABC γράφουμε το ύψος AD.
 Νόμο $(B, C, D) = \frac{C \cos B}{b \cos B}$ όπου C το μήκος του
 τμήματος AB και
 b το μήκος του τμήματος AC

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι $(B, C, D) = 2$ δηλαδή

$$|\vec{BD}| = 2|\vec{BC}|$$



→

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $\lambda > 0$
 Τότε: $\|\vec{BA}\| = \lambda \|\vec{OC}\| \Rightarrow \lambda = \frac{\|\vec{BA}\|}{\|\vec{OC}\|}$ (1)

$$\text{Όμως } \cos \hat{B} = \frac{\|\vec{BA}\|}{\|\vec{AB}\|} \Rightarrow \sqrt{\|\vec{BA}\|} = c \cdot \cos \hat{B}$$

Επίσης,

$$\cos \hat{C} = \frac{\|\vec{CB}\|}{\|\vec{AC}\|} \Rightarrow \sqrt{\|\vec{CB}\|} = b \cdot \cos \hat{C}$$

Αρα από (1), (2), (3) βρίσκουμε $\lambda = \frac{\cos \hat{B}}{b \cos \hat{C}}$

Ομοίως η περίπτωση $\lambda < 0$

Φυλλάδιο 5

1.1 Να βρεθούν η διανυσματική εξίσωση, οι παραμετρικές εξισώσεις και η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου:

- (i) που διέρχεται από το $A(1, -1, 2)$ και είναι παράλληλο προς τα $\vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (-1, 3, 4)$
- (ii) που διέρχεται από τα σημεία $A(3, -1, 2)$, $B(2, -5, 0)$ και είναι παράλληλο προς το $\vec{a} = (2, 5, 3)$
- (iii) που διέρχεται από τα $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $\Gamma(0, 0, 1)$
- (iv) που διέρχεται από το $A(1, 3, -2)$ και είναι κάθετο στο $\vec{a} = (-3, 4, 1)$

Λύση: • Διανυσματική: $\vec{r} = (1, -1, 2) + \lambda(1, 0, -2) + \mu(-1, 3, 4)$

→

• Παραμετροί:

$$x = -1 + \lambda - \mu$$

$$y = -1 + 3\mu$$

$$z = 2 + 2\lambda + 4\mu$$

• Αναλυτική εξίσωση

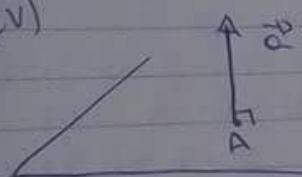
$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(ii) Υπολογίζουμε δύο παράλληλα γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους παράλληλα προς το επίπεδο. Το ένα είναι το $\vec{a} = (2, 5, 3)$

Ο $\vec{b}$ δεύτερο διάνυσμα θεωρώ το $\vec{b} = \vec{AB} = (-1, -4, -2)$

(iii) Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{AB} = (-1, 1, 0)$
 $\vec{b} = \vec{BC} = (0, -1, 1)$

(iv)



1ος τρόπος:

Το επίπεδο θα έχει τιμοθεση:
 $-3x + 4y + z + 5 = 0$

Επειδή Α σημείο επιπέδου $\Rightarrow -3(1) + 4(3) + (-2) + 5 = 0$

2ος τρόπος: Έστω $P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου, τότε: $0 = \langle \vec{AP}, \vec{a} \rangle =$

$$= \langle (x-1, y-3, z+1), (-3, 4, 1) \rangle =$$

$$= \boxed{0 = - (x-1) \cdot 3 + 4(y-3) + 1(z+1)} \sim \text{αναλυτική εξίσωση}$$

$$\Rightarrow \boxed{-3x + 4y + z = 7} \quad (*)$$

-D

Θέλουμε να βρούμε διανύσματα (δρ ανεξάρτητα)
 Εγγεγραμμένα διανύσματα του επιπέδου (x)
 Θα βρούμε 2 άλλα σημεία

$$\text{Πα } \boxed{z=0=y} \Rightarrow \boxed{x=-z/3}$$

$$A_2 (-z/3, 0, 0)$$

$$\text{Πα } \boxed{x=0=y} \Rightarrow \boxed{z=z}$$

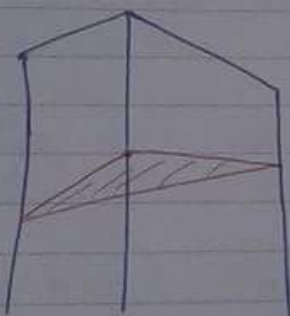
$$A_3 (0, 0, z)$$

1.3 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που
 διέρχεται από το σημείο $P(2, 1, -1)$ και
 είναι κάθετο στα επίπεδα :

$$\Pi_1: 2x + y - 3 = 0$$

$$\Pi_2: x + 2y + z = 2$$

Λύση:



1^{ος} τρόπος: Τα διανύσματα
 $\vec{a}^P = (2, 1, 0)$ και $\vec{b} = (1, 2, 1)$
 είναι κάθετα στα Π_1 και
 Π_2 αντίστοιχα. Άρα το
 $\vec{n} = \vec{a}^P \times \vec{b}$ είναι κάθετο
 στο επίπεδο που
 ζητάμε!

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = (1, -2, 3)$$

Άρα το επίπεδο είναι:

$$(x-2) \cdot 1 + (y-1) \cdot (-2) + (z-1) \cdot (3) = 0$$

2ος τρόπος: Τα διανύσματα $\vec{a}^p, \vec{b}^p$ είναι
εγκαινόμενα στο επίπεδο που ζητάμε

Άρα:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\leadsto (x-2) - 2(y-1) + 3(z+1) = 0$$